12 Le choix du producteur en concurrence parfaite

L'objectif du producteur – ou de l'entreprise – est de *maximiser son profit*, celui-ci étant donné par la différence entre ses recettes et ses dépenses. Plus précisément, le producteur cherche à déterminer le panier d'inputs $(q_1, \ldots, q_n)$ – à partir duquel il peut produire $f(q_1, \ldots, q_n)$ d'output ($f(\cdot)$ étant sa *fonction de production* : *cf.* fiche 4) –, qui rend maximum la différence :

$$pf(q_1, \ldots, q_n) - (p_1q_1 + \ldots + p_nq_n),$$

où $pf(q_1, \ldots, q_n)$ est sa recette lorsque le prix de l'output est p, et où $p_1q_1 + \ldots + p_nq_n$ est sa dépense en inputs, lorsque le prix de l'input i est p_i $(i = 1, \ldots, n)$.

En concurrence parfaite, on suppose que le producteur ne peut pas proposer un prix pour ce qu'il vend ou achète et que les prix sont affichés par une entité extérieure aux agents du modèle. En outre, ceux-ci prennent leurs décisions sans tenir compte de leur éventuel effet sur les prix affichés (*cf.* fiche 5). Sous ces hypothèses, le choix du producteur porte exclusivement sur le panier d'inputs $(q_1, \ldots, q_n)$ (avec lequel il produit $f(q_1, \ldots, q_n)$). C'est pourquoi on note $\pi(q_1, \ldots, q_n)$ son profit en concurrence parfaite. On a donc :

(12.1) $$\pi(q_1, \ldots, q_n) = pf(q_1, \ldots, q_n) - (p_1q_1 + \ldots + p_nq_n).$$

I Le choix du producteur dans le cas usuel

En concurrence parfaite, le producteur – ou l'entreprise – pense qu'il pourra, aux prix affichés, acheter tous les inputs qu'il demande et vendre le produit qu'il offre. Autrement dit, il fait son choix sans se soucier des éventuelles contraintes qu'il pourrait subir au niveau de ses achats ou de ses ventes. Par conséquent, son choix se réduit à la recherche du maximum de la fonction $\pi(\cdot)$. Si $f(\cdot)$ est dérivable, une *condition nécessaire* pour que le panier d'inputs $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$ permette d'obtenir un profit maximum est qu'il annule les dérivées partielles de la fonction $\pi(\cdot)$. C'est la *condition du premier ordre* :

(12.2) $$\pi'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Comme le producteur pense que son choix n'influence en rien les prix $p, p_1, \ldots, p_n$ – il voit en eux des paramètres indépendants de ses offres et ses demandes – la condition (12.2) s'écrit, compte tenu de la forme de la fonction $\pi(\cdot)$ [donnée par la formule (12.1)] :

(12.3) $$pf'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*) = p_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La condition (12.3) s'interprète de la façon suivante : le producteur va demander une quantité de l'input i, quel qu'il soit, telle que son produit marginal $pf'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*)$ (valeur du produit obtenue avec « la dernière unité utilisée » de cet input) soit égal à son prix (coût de cette dernière unité). Autrement dit, et de façon un peu vague, la demande d'inputs est telle qu'elle épuise les possibilités de faire un profit supplémentaire en augmentant la production (et donc en achetant plus d'inputs).

Cette interprétation de la condition (12.3) n'a toutefois de sens que si le produit marginal de chaque input est décroissant, donc que si *les productivités marginales sont décroissantes*, du moins en $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$ (*cf.* fiche 4).

Si, en outre, les rendements d'échelle étaient croissants en $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$, le profit n'y serait pas maximum (il pourrait être augmenté en accroissant l'échelle de production). La condition (12.3) n'a donc de sens que si *les rendements d'échelle sont décroissants ou constants en* $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$.

La condition (12.3) se présente comme un système de n équations à n inconnues (les demandes d'inputs $q_1^*, \ldots, q_n^*$). S'il a une solution, celle-ci dépend des prix des inputs et de celui de l'output. Si on veut tenir compte de cette dépendance, on la note $q_i(p_1, \ldots, p_n, p)$ plutôt que q_i^* ($i = 1, \ldots, n$) et on appelle la fonction $q_i(\cdot)$ *fonction de demande* de l'input i de l'entreprise.

L'*offre* de l'entreprise aux prix $p_1, \ldots, p_n, p$, s'obtient en « entrant » les inputs « optimaux » q_i^*, $i = 1, \ldots, n$, dans la fonction de production. Si on note $s(\cdot)$ la fonction d'offre de l'entreprise, cette fonction est donc définie par l'égalité :

(12.4) $$s(p_1, \ldots, p_n, p) = f(q_1(p_1, \ldots, p_n, p), \ldots, q_n(p_1, \ldots, p_n, p)).$$

Cette offre ne dépend que des prix affichés, des inputs et de l'output (conséquence de l'hypothèse de concurrence parfaite). Toutefois, souvent en microéconomie, seul le prix de l'output apparaît explicitement dans la fonction d'offre ; la formule (12.4) se réduit alors à :

$$s(p) = f(q_1(p), \ldots, q_n(p)).$$

Notons enfin qu'on déduit des conditions (12.3), pour deux inputs i et j quelconques dont les productivités marginales sont non nulles, l'égalité :

(12.5) $$\frac{f'_{q_i}(q_i^*, \ldots, q_n^*)}{f'_{q_j}(q_i^*, \ldots, q_n^*)} = \frac{p_i}{p_j}.$$

On retrouve la condition d'égalité entre le taux marginal de substitution de deux biens demandés (ici, des inputs) et le rapport de leurs prix, condition déjà rencontrée dans la théorie du choix du consommateur en concurrence parfaite (*cf.* fiche 7). Lorsqu'il n'y a que deux inputs, l'ensemble des paniers de biens qui vérifient cette relation peut être représenté par une courbe, le *sentier d'expansion* (obtenu en faisant varier la quantité produite).

APPLICATION

Soit une entreprise dont la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par l'égalité :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/4}.$$

$f(\cdot)$ est donc une fonction de Cobb-Douglas (*cf.* fiche 3). Comme elle est homogène de degré $1/4 + 1/2 = 3/4$ (< 1), elle est à rendements d'échelle décroissants ; en outre, les productivités marginales $f'_{q_1}(q_1, q_2)$ $(= \frac{1}{2} q_1^{-1/2} q_2^{1/4})$ et $f'_{q_2}(q_1, q_2)$ $(= \frac{1}{4} q_1^{1/2} q_2^{-3/4})$ sont décroissantes. Les conditions nécessaires pour obtenir un profit maximum sont donc vérifiées.

Les conditions (12.3) prennent ici la forme du système de deux équations à deux inconnues :

(12.6) $$\begin{cases} \frac{1}{2} p q_1^{*-1/2} q_2^{*1/4} = p_1 \\ \frac{1}{4} p q_1^{*1/2} q_2^{*-3/4} = p_2 \end{cases}$$

En faisant le rapport, membre à membre, de ces deux équations, on obtient l'équation du sentier d'expansion :

(12.7) $$\frac{2q_2^*}{q_1^*} = \frac{p_1}{p_2}.$$

C'est, dans le plan des inputs, une droite qui passe par l'origine et de pente $p_1/2p_2$. De (12.7), on tire : $q_2^* = (p_1/2p_2)q_1^*$. En remplaçant dans (12.6), on obtient une équation qui n'a que q_1^* pour inconnue. Soit, en posant $k = p_1/2p_2$:

$$p q_1^{*-1/2}(k q_1^*)^{1/4} = 2p_1.$$

D'où les demandes des biens 1 et 2 :

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{p^4 k}{(2p_1)^4} = \dfrac{p^4}{32 p_1^3 p_2} \\ q_2^* = \dfrac{p^4}{(8p_1p_2)^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans la fonction de production on obtient la fonction d'offre :

$$s(p_1, p_2, p) = f(q_1^*, q_2^*) = f\left(\frac{p^4}{32p_1^3p_2}, \frac{p^4}{(8p_1p_2)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{p^4}{32p_1^3p_2}\right)^{1/2} \left(\frac{p^4}{(8p_1p_2)^2}\right)^{1/4} = \frac{p^3}{8 \times 2^{1/4} p_1^2 p_2}.$$

II Le cas des rendements d'échelle constants

Ce cas représente une situation limite, entre rendements croissants et rendements décroissants. Il présente un certaine nombre de particularités. Ainsi, il ne peut y avoir de production (finie) en concurrence parfaite que si elle procure un profit nul. En effet, comme le profit s'écrit :

$$\pi(q_1, \ldots, q_n) = pf(q_1, \ldots, q_n) - p_1q_1 - \ldots - p_nq_n$$

alors :

$$\pi(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n) = pf(\lambda q_n, \ldots, \lambda q_n) - p_1\lambda q_1 - \ldots - p_n\lambda q_n = \lambda\pi(q_1, \ldots, q_n).$$

Ainsi, si $\pi(q_1, \ldots, q_n) \neq 0$, alors l'entreprise pourrait choisir un panier $(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n)$ avec λ « aussi grand qu'elle veut » – puisqu'en concurrence parfaite il est supposé que les agents font leur choix sans tenir compte d'éventuels rationnements –, dans le but de faire un profit (théoriquement) infini. Ce qui n'est évidemment pas réalisable. Par conséquent, en concurrence parfaite, les rendements d'échelle constants ne sont compatibles qu'avec un profit négatif ou nul. Pour que cela soit le cas, il faut que le prix de vente du produit soit inférieur ou égal à son coût unitaire de production. Si on note c_u ce dernier, alors l'offre :

- est nulle lorsque le prix est inférieur à c_u ;
- peut prendre n'importe quelle valeur lorsque le prix est égal à c_u ;
- n'est pas définie pour un prix strictement supérieur à c_u.

Son graphe a donc la forme suivante :

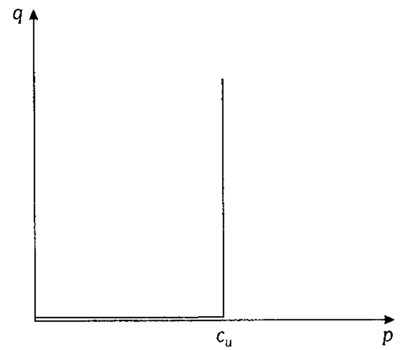

Figure 12.1

Pour déterminer le coût unitaire, on part de la condition du premier ordre (12.3) (on suppose, pour simplifier les notations, qu'il n'y a que deux inputs) :

$$\begin{cases} pf'_{q_1}(q_1{}^*, q_2{}^*) = p_1 \\ pf'_{q_2}(q_1{}^*, q_2{}^*) = p_2 \end{cases}$$

La fonction $f(\cdot)$ étant homogène de degré 1, ses dérivées partielles sont homogènes de degré 0 (théorème d'Euler), et ne dépendent donc que du rapport $q_1{}^*/q_2{}^*$ (si $q_2{}^* \neq 0$). Les conditions d'optimalité peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} pf'_{q_1}(q_1{}^*/q_2{}^*, 1) = p_1 \\ pf'_{q_2}(q_1{}^*/q_2{}^*, 1) = p_2 \end{cases}$$

Ce système d'équations n'a, en fait, qu'une seule inconnue, le rapport q_1^*/q_2^*. Il s'ensuit que les paramètres – ici les prix – qui y interviennent doivent être liés. Pour trouver ce lien, on « extrait » q_1^*/q_2^* de la première équation, en fonction de p et de p_1 ; ce qu'on écrit : $q_1^*/q_2^* = \varphi(p, p_1)$.

En remplaçant dans la deuxième équation on obtient la condition liant p, p_1 et p_2 :

$$pf'_{q_2}(\varphi(p, p_1), 1) = p_2.$$

La valeur du prix du produit p qui vérifie cette relation donne le coût unitaire (minimum) c_u.

APPLICATION

Supposons que la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par la formule :

$$f(q_1, q_2) = 2(q_1q_2)^{1/2}.$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} p(q_2^*/q_1^*)^{1/2} = p_1 \\ p(q_1^*/q_2^*)^{1/2} = p^2 \end{cases}$$

De la première équation on tire $q_2^*/q_1^* = (p_1/p)^2$. En remplaçant dans la deuxième, on trouve la relation liant les paramètres (les prix) du modèle :

$$p = (p_1p_2)^{1/2}.$$

La fonction d'offre de concurrence parfaite est donc dans ce cas :

- offre nulle si $p < (p_1p_2)^{1/2}$;
- offre indéterminée (entre 0 et l'infini) si $p = (p_1p_2)^{1/2}$;
- offre (théoriquement) infinie si $p > (p_1p_2)^{1/2}$.

13 La fonction de coût

La fonction d'offre de concurrence parfaite peut être calculée soit directement à partir de la fonction de production (et des prix affichés des biens), comme cela a été fait dans la fiche 12, soit indirectement, à partir de la fonction de coût, qui se déduit elle-même de la fonction de production.

La fonction de coût est notamment utilisée en microéconomie pour introduire dans l'analyse de l'entreprise les *coûts fixes*, dus à l'existence d'*indivisibilités*, qui sont souvent elles-mêmes considérées comme une des raisons d'être des entreprises. La référence aux coûts fixes permet aussi d'introduire l'idée d'adaptation à « long terme » de la production de l'entreprise.

I La fonction de coût déduite de la fonction de production

Par définition, une fonction de coût $c(\cdot)$ associe à chaque quantité de produit q, le coût minimum $c(q)$ en inputs nécessaires pour la produire. La fonction de coût est donc la solution du programme :

$$\text{minimiser } p_1q_1 + \ldots + p_nq_n,$$
$$\text{sous la contrainte } f(q_1,\ldots,q_n) = q,$$

où $f(\cdot)$ désigne la fonction de production de l'entreprise et où les prix p sont donnés et considérés par l'entreprise comme indépendants de ses choix (hypothèse de concurrence parfaite ; *cf.* fiche 6).

La résolution du programme ci-dessus passe par la détermination des quantités demandées d'inputs, qu'on va noter $q_i(q)$, $i = 1,\ldots,n$, puisqu'elles dépendent de la quantité produite q. Le coût minimum pour produire q est alors :

$$c(q) = p_1q_1(q) + \ldots + p_nq_n(q).$$

Si la fonction de production a des isoquantes de type hyperbolique, alors les demandes d'inputs doivent vérifier la condition d'optimalité : taux marginal de substitution = rapport de prix, tout en satisfaisant la contrainte : $f(q_1,\ldots,q_n) = q$. S'il n'y a que deux inputs, elles sont donc solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{f'_{q_1}(q_1,q_2)}{f'_{q_2}(q_1,q_2)} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ f(q_1,q_2) = q. \end{cases}$$

La solution, $(q_1(q),\ q_2(q))$ de ce système se trouve donc sur le *sentier d'expansion* (*cf.* fiche 12). Elle peut être déterminée graphiquement en traçant la tangente de pente $-p_1/p_2$ à l'isoquante de niveau q, comme cela est fait dans la figure 13.1 (les droites de pente $-p_1/p_2$ sont appelées *droites d'isocoût*).

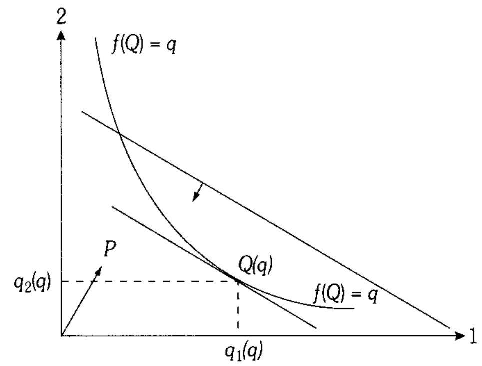

Figure 13.1

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit.

APPLICATION

On suppose que la fonction de production $f(\cdot)$ est définie par la formule :

$$f(q_1,q_2) = q_1q_2.$$

C'est donc une fonction de Cobb-Douglas.

Ses isoquantes étant des hyperboles, les demandes d'inputs qui minimisent le coût pour produire q sont solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{p_1}{p_2} & \text{(TMS = rapport des prix)} \\ q_1q_2 = q & \text{(isoquante de niveau } q\text{)} \end{cases}$$

Après calculs (simples), on obtient cette solution, qui dépend évidemment de q (et des prix) :

$$\begin{cases} q_1(q) = \sqrt{\dfrac{p_2 q}{p_1}} & \text{(demande de l'input 1)} \\ q_2(q) = \sqrt{\dfrac{p_1 q}{p_2}} & \text{(demande de l'input 2)} \end{cases}$$

La fonction de coût est donc :

$$\begin{cases} c(q) = p_1 \sqrt{\dfrac{p_2 q}{p_1}} + p_2 \sqrt{\dfrac{p_1 q}{p_2}} \\ \quad = 2\sqrt{p_1 p_2 q} \end{cases}$$

II Coûts fixes, coût moyen, coût marginal

Jusqu'à présent, on a supposé que la production varie de façon continue, ou progressive, avec les quantités d'inputs, ceux-ci étant considérés comme indéfiniment divisibles. Afin de tenir compte de l'existence de coûts incompressibles, indépendants de la quantité produite, on introduit dans la fonction de coût un terme constant, noté c_F, et qui représente donc des *coûts fixes*. La fonction de coût s'écrit alors :

$$C(q) = c(q) + c_F,$$

où $c(q)$ désigne les *coûts variables*, qui ne concernent que les inputs divisibles (ceux qui interviennent dans la fonction de production).

À partir de la fonction de coût ainsi élargie, on définit la fonction de coût moyen, $C_M(\cdot)$, qui associe à tout $q > 0$, le coût unitaire $C(q)/q$. Soit :

$$C_M(q) = \frac{c(q) + c_F}{q}.$$

Ainsi, pour des valeurs de q proches de 0, le coût moyen tend vers l'infini, à cause du terme c_F/q. Ce terme devient en revanche de plus en plus petit au fur et à mesure que q augmente ; si on suppose que le coût variable $c(q)$ augmente avec q, et plus vite que lui, alors la fonction de coût moyen est d'abord décroissante (lorsque les q sont « petits »), puis croissante. Son graphe est donc « en U » : il existe un niveau de production q_0 pour lequel le coût unitaire est minimum. La courbe de *coût marginal*, dérivée de la fonction de coût, passe d'ailleurs par ce minimum. Autrement dit, on a :

$$C_M(q°) = C'(q°).$$

Cette propriété vient immédiatement en dérivant $CM(\cdot)$ et en annulant cette dérivée au minimum $q°$. En effet, comme $C_M'(q) = (c'(q)q - (c(q) + c_F))/q_2$, on a :

$$C_M'(q°) = 0 \Rightarrow q°c'(q°) - (c(q°) + c_F) = 0 \Rightarrow c'(q°) = (c(q°) + c_F)/q° \; (= C_M(q°)).$$

La situation est résumée dans la figure 13.2 :

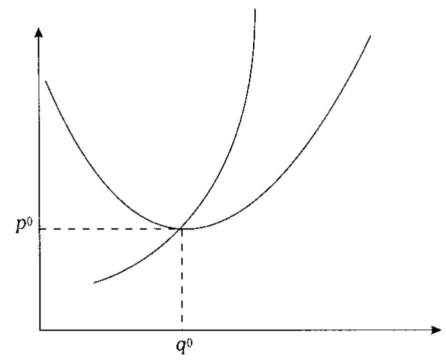

Figure 13.2

III L'offre de concurrence parfaite

Comme pour les inputs, le prix de l'output est considéré comme donné, et l'entreprise pense que ses choix n'ont pas d'influence sur lui (hypothèse de concurrence parfaite). Si on note p ce prix, le profit de concurrence parfaite $\pi(q)$, lorsque la production est q, est donné par la différence entre la recette pq et le coût $C(q)$. Soit :

$$\pi(q) = pq - C(q).$$

La quantité q^* qui maximise $\pi(\cdot)$ doit donc être telle qu'elle vérifie la condition du premier ordre :

$$\pi'(q) = 0,$$

et donc telle que :

$$C'(q) = p.$$

Pour que q^* procure un profit maximum, il faut en outre que le coût marginal $C'(\cdot)$ soit croissant en q^* (condition du second ordre). Si on suppose que tel est le cas – et, plus généralement, que le coût marginal est toujours croissant, quel que soit q – alors *le profit de concurrence parfaite est maximum si la production est telle que le coût marginal est égal au prix*. La figure 13.3 montre comment, sous ses hypothèses, la production q^* peut être déterminée graphiquement.

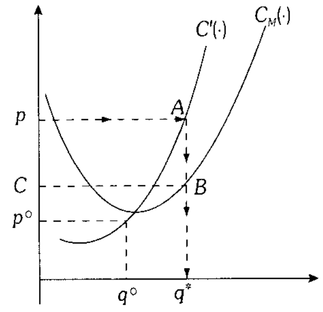

Figure 13.3

Lorsque le prix p est supérieur à $p^\circ = C_M(q^\circ)$, l'entreprise fait un profit unitaire égal à $p - C_M(q^*)$ (longueur du segment AB), son profit total étant donc égal à $q^*(p - C_M(q^*))$ (surface du rectangle $pABC$).

Si, en revanche, le prix est inférieur à $C_M(q^\circ)$, le profit est négatif, quel que soit q. L'entreprise n'a donc aucune raison de produire : son offre est nulle.

Ainsi, comme $C'(q^*) = p \Rightarrow q^* = C'^{-1}(p)$ (en supposant que la fonction $C'(\cdot)$ est inversible), la fonction d'offre $s(\cdot)$ de l'entreprise est donnée par :

$$\begin{cases} s(p) = 0, \text{ si } p < C_M(q^\circ) \\ s(p) = C'^{-1}(p), \text{ si } p \geqslant C_M(q^\circ). \end{cases}$$

Elle est donc discontinue, comme dans la figure 13.4.

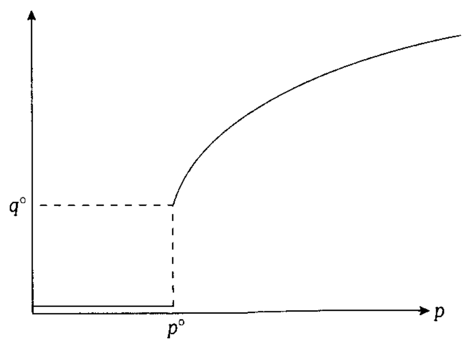

Figure 13.4

APPLICATION

On suppose que la fonction de coût est :

$$C(q) = q^3 + q + 16.$$

Le coût moyen est donc :

$$C_M(q) = q^2 + 1 + \frac{16}{q}.$$

Sa courbe représentative est « en U ». Elle passe par un minimum. Comme sa dérivée :

$$C_M'(q) = 2q - \frac{16}{q^2},$$

s'annule pour la production :

$$q^\circ = 2,$$

le prix en-dessous duquel le profit est négatif est donc égal à :

$$C_M(2) = 13.$$

L'égalité entre coût marginal et prix étant ici :

$$3q^2 + 1 = p,$$

on a donc, comme on ne considère que des quantités positives :

$$q = \sqrt{\frac{p-1}{3}} \text{ (à condition que } p > 1).$$

D'où la fonction d'offre de l'entreprise :

- $s(p) = 0$, si $p < 13$,
- $s(p) = \sqrt{\frac{p-1}{3}}$, si $p \geqslant 13$.