Si on n'utilise les fonction d'utilité que pour classer les paniers de biens, alors on dit qu'on adopte un point de vue *ordinal*, comme avec la relation de préférence (que ces fonctions ne font que représenter). Mais si on privilégie une fonction d'utilité particulière parmi toutes celles qui peuvent représenter la relation de préférence du consommateur, et si on donne une signification aux nombres que cette fonction d'utilité attribue aux paniers de biens (« plaisir », « satisfaction »,...), alors on dit qu'on adopte un point de vue *cardinal*.

I Courbe d'indifférence et taux marginal de substitution (TMS)

Étant donné une fonction d'utilité $U(\cdot)$ et un panier de biens quelconque Q_0, la courbe d'indifférence passant par Q_0 est formée par l'ensemble I_{Q_0} des paniers de biens Q tels que :

(4.1) $$U(Q) = U(Q_0).$$

Si on pose $U(Q_0) = U_0$, alors on dit que le panier de biens Q tel que $U(Q) = U_0$ appartient à la courbe d'indifférence de niveau U_0.

Comme les courbes d'indifférence représentent des paniers de deux biens, on a $Q = (q_1,q_2)$ et l'équation (4.1) s'écrit (en posant : $U(Q_0) = U_0$) :

(4.2) $$U(q_1,q_2) = U_0.$$

Cette égalité établit une relation entre les quantités q_1 et q_2, dont la courbe d'indifférence est l'expression graphique ; relation qu'on notera $q_2 = g(q_1)$ ($g(\cdot)$ est donc la *fonction implicite* relative à l'équation (4.2) – *cf.* fiche 26). En remplaçant q_2 par $g(q_1)$ dans l'équation (4.2), celle-ci s'écrit :

(4.3) $$U(q_1,g(q_1)) = U_0.$$

La figure 3.1 illustre ce qui vient d'être dit :

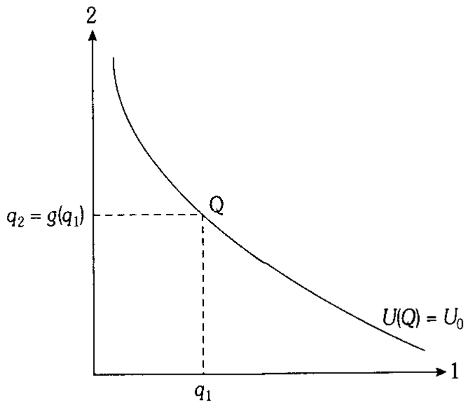

Figure 3.1

En dérivant (par rapport à q_1) les deux membres de (4.3) , il vient (*cf.* fiche 26, « dérivation en chaîne ») :

$$U'_{q_1}(q_1,g(q_1)) + U'_{q_2}(q_1,g(q_1)) \times g'(q_1)=0,$$

et donc, en tenant compte de ce que $q_2 = g(q_1)$, et en supposant $U_{q_2}(q_1,q_2) \neq 0$:

(4.4) $$g'(q_1) = -\frac{U'_{q_1}(q_1,q_2)}{U'_{q_2}(q_1,q_2)}.$$

Or, on a vu dans la fiche 2, que la dérivée $g'(q_1)$ – pente de la tangente en $Q = (q_1,q_2)$ à la courbe d'indifférence – donne, par définition (au signe près), le *taux marginal de substitution* en Q du bien 2 relativement au bien 1 (taux noté $TMS_{2/1}$). Il résulte donc de cette définition et de la relation (4.4) que :

(4.5) $$TMS_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{U'_{q_1}(q_1,q_2)}{U'_{q_2}(q_1,q_2)}.$$

Comme le taux marginal de substitution est une notion ordinale – propre aux courbes d'indifférence –, qui ne dépend donc pas de la fonction d'utilité retenue pour représenter la relation de préférence du consommateur, l'égalité (4.5) est valable – elle donne toujours le même nombre – *quelle que soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ retenue pour représenter la relation de préférence.*

Dans le cas général, où il y a n biens, on a de la même façon pour une fonction d'utilité $U(\cdot)$ dérivable et à dérivées non nulles en Q :

$$TMS_{i/j}(Q) = \frac{U'_{q_j}(Q)}{U'_{q_i}(Q)} \qquad i = 1,\ldots,n\ ,\ j = 1,\ldots,n.$$

La dérivée partielle $U'_{q_i}(Q)$ est appelée *utilité marginale* du bien i, pour le panier de biens Q. Le taux marginal de substitution entre deux biens est donc obtenu en faisant le rapport de leurs utilités marginales.

II Propriétés de la fonction d'utilité déduites de celles de la relation de préférence

A. Monotonie

$U(\cdot)$ est une fonction strictement croissante par rapport à chacune de ses variables. Dans le cas où la fonction d'utilité est dérivable, la monotonie signifie que ses dérivées partielles (utilités marginales) sont strictement positives.

B. Convexité des préférences

Dans le cas où une fonction d'utilité $U(\cdot)$ représente une relation de préférence convexe, alors on a :

$$U(Q) = U(Q') \Rightarrow (U(\lambda Q + (1-\lambda)Q') \succsim U(Q)(= U(Q')),\quad \forall \lambda \in [0,1]).$$

On dit d'une fonction d'utilité qui a cette propriété qu'elle est *quasi concave*. La quasi-concavité signifie donc que le consommateur « aime les mélanges » (*cf.* fiche 2).

APPLICATIONS

1. La relation de préférence représentée par la fonction d'utilité $U(\cdot)$ – dite de Cobb-Douglas – définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1{}^{\alpha}q_2{}^{\beta}, \text{ avec } \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

peut aussi être représentée par les fonctions $V_k(\cdot)$ définies par :

$$V_k(q_1,q_2) = [U(q_1,q_2)]^k\ (= q_1{}^{k\alpha}q_2{}^{k\beta}),\quad k > 0,$$

ou par la fonction $W(\cdot)$ définie par (pour $q_1 > 0$, $q_2 > 0$) :

$$W(q_1,q_2) = \ln U(q_1,q_2) = \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2$$

puisque les fonctions « puissance k » (avec $k > 0$) et « logarithme népérien » sont strictement croissantes.

La fonction $W(\cdot)$ est dite « loglinéaire », car c'est une fonction linéaire par rapport aux logarithmes des variables considérées.

Comme la fonction $U(\cdot)$ est strictement croissante par rapport à chacune de ses deux variables, elle est monotone ; ses courbes d'indifférence sont donc strictement décroissantes.

Elles sont, en outre, de type hyperbolique (convexes et asymptotes aux axes) ; en effet, comme la courbe d'indifférence relative à une utilité U_0 quelconque vérifie par définition l'équation :

$$q_1{}^{\alpha}q_2{}^{\beta} = U_0$$

il s'ensuit qu'on a (pour $q_1 > 0$) :

$$q_2 = \frac{U_0{}^{1/\beta}}{q_1{}^{\alpha/\beta}}.$$

La figure 3.2 donne le graphe d'une fonction de ce type, convexe et asymptote aux deux axes.

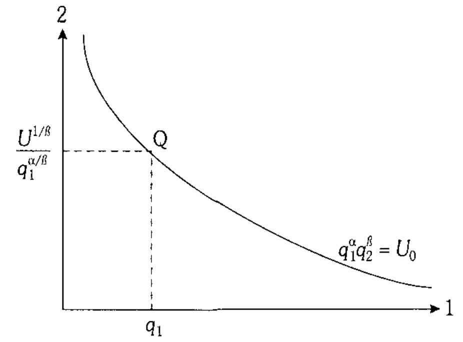

Figure 3.2

Le calcul du taux marginal de substitution, rapport des utilités marginales, est le plus simple avec la fonction d'utilité $W(\cdot)$, dont les dérivées sont α/q_1 et β/q_2. On a donc, dans le cas présent, pour $q_1 \neq 0$:

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{\alpha q_2}{\beta q_1}.$$

Lorsqu'on parcourt une courbe d'indifférence de gauche à droite, q_1 augmentant de 0^+ à $+\infty$, le taux marginal de substitution décroît, de $+\infty$ à 0.

2. Soit la fonction d'utilité $U(\cdot)$ définie par :

$$U(q_1,q_2) = q_1{}^{\alpha} + q_2{}^{\beta},\quad 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1.$$

Cette fonction est *additivement séparable*, ce qui implique que l'utilité marginale de chaque bien ($\alpha q_1{}^{\alpha-1}$ pour le bien 1 et $\beta q_2{}^{\beta-1}$ pour le bien 2) ne dépend que de la quantité consommée de ce bien. Ces utilités marginales sont strictement décroissantes, du fait qu'on suppose $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

$U(\cdot)$ étant une fonction strictement croissante par rapport à q_1 et à q_2, les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes.

Le taux marginal de substitution, $\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2)$, rapport des utilités marginales, est égal à (pour $q_2 \neq 0$) :

$$\frac{\alpha q_1{}^{\alpha-1}}{\beta q_2{}^{\beta-1}}.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ et comme $0 < \beta < 1$, il décroît de $+\infty$ à 0 lorsque q_1 augmente de 0^+ à $+\infty$. Les courbes d'indifférences sont donc convexes. Elles ne sont toutefois pas asymptotes aux axes ; en fait, elles leur sont tangentes aux points où elles les touchent. La figure 3.3 donne un exemple d'un tel type de courbe d'indifférence.

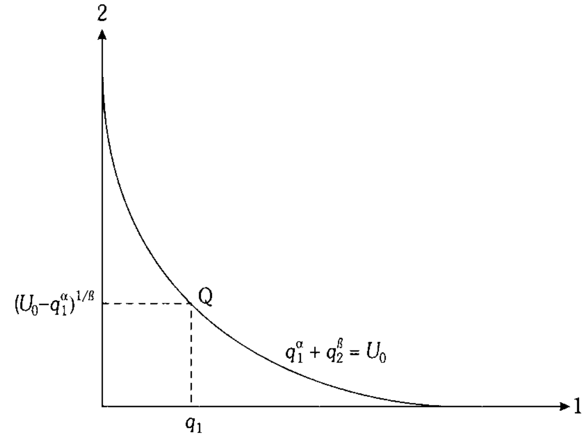

Figure 3.3

4 Producteur et fonction de production

Le producteur – ou l'entreprise – est caractérisé par un *ensemble de production*, catalogue des techniques dont il peut disposer (ou dont il dispose). À partir de l'ensemble de production, on définit la *fonction de production*, qui associe à chaque panier d'inputs (travail, matières premières, « services » fournis par les équipements, etc.) la *quantité maximum de produit* qui peut être obtenue à partir de ces inputs, à condition de choisir la technique la plus appropriée de l'ensemble de production. Si $f(\cdot)$ est une fonction de production et si $Q = (q_1,\dots,q_n)$ est un panier d'inputs, alors $q = f(q_1,\dots,q_n)$ donne, par définition, la quantité maximum de produit qui peut être obtenue à partir de Q.

Si la fonction de production est dérivable, alors on appelle *productivité marginale* du i-ème input sa dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable. Soit :

$$\text{productivité marginale en } Q \text{ de l'input } i : f'_{q_i}(Q).$$

En règle générale, on suppose que les productivités marginales sont positives – une augmentation de la quantité d'un input quelconque entraîne une augmentation de la production – et décroissantes, ce qui s'écrit :

$$f'_{q_i}(\cdot) > 0 \qquad i = 1,\dots,n$$
$$f''_{q_i^2}(\cdot) < 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

I Isoquantes

La notion d'isoquante est l'équivalent, dans la théorie du producteur, de celle de courbe d'indifférence, dans la théorie du consommateur (*cf.* fiche 2). Dans le cas où il n'y a que deux inputs, notés 1 et 2 (les quantités des autres inputs pouvant être considérées comme fixées), l'isoquante relative à la production q est donc formée par l'ensemble des paniers d'inputs (q_1,q_2) tels que :

$$f(q_1,q_2) = q.$$

À partir de la notion d'isoquante on définit celle de taux marginal de susbstitution (TMS) entre deux inputs (comme on le fait à partir de la notion de courbe d'indifférence) : c'est un taux d'échange entre inputs qui permet de maintenir, tout au plus et en utilisant les techniques appropriées, la quantité produite (en restant sur la même isoquante). Si la fonction de production $f(\cdot)$ est dérivable, avec des productivités marginales strictement positives, alors le taux marginal de substitution entre l'input 2 et l'input 1, au panier $Q = (q_1,q_2)$, est donné par le rapport de ces productivités marginales, en Q. Soit :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \frac{f'_{q_1}(q_1,q_2)}{f'_{q_2}(q_1,q_2)}.$$

Si ce taux décroît lorsqu'on parcourt de gauche à droite une isoquante, alors celle-ci est convexe. Un cas limite est celui où les isoquantes sont des droites ; on dit alors que les inputs sont des substituts parfaits, le TMS étant constant, quel que soit le panier d'inputs considéré. La fonction de production est, dans ce cas, de la forme : $f(q_1,q_2) = aq_1 + bq_2$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

Un autre cas limite est celui où les isoquantes sont « en L » (elles sont formées de deux demi-droites parallèles aux axes) ; on dit alors que les deux inputs sont *strictement complémentaires*. La fonction de production est, dans ce cas, de la forme : $f(q_1,q_2) = \min\{a/q_1, b/q_2\}$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

Dans la figure 4.1, on a représenté ces deux cas limites, 4.1*a* et 4.1*c*, et un cas intermédiaire, 4.1*b*.

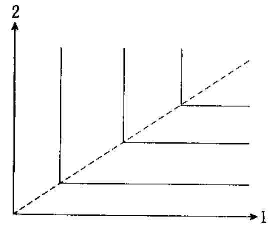

Figure 4.1*a*

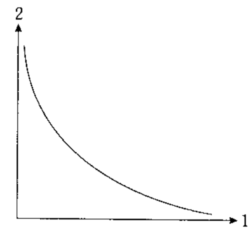

Figure 4.1*b*

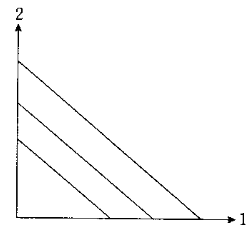

Figure 4.1*c*

Une condition suffisante pour que les isoquantes soient convexes, dans le cas d'une fonction de production de classe C^2, est que les productivités marginales soient décroissantes (soit $f''_{q_i^2}(\cdot) < 0$) et que la dérivée seconde croisée $f''_{q_iq_j}(\cdot)$ soit strictement négative.

Lorsque la fonction de production est homogène (de degré k), les productivités marginales sont aussi homogènes (de degré $k-1$) ; par conséquent, ses taux marginaux de substitution (TMS) – rapports de productivités marginales –, sont homogènes de degré 0 (puisque $f'_{q_1}(\lambda q_1,\lambda q_2)/f'_{q_2}(\lambda q_1,\lambda q_2) = \lambda^{k-1} f'_{q_1}(q_1,q_2)/\lambda^{k-1} f'_{q_2}(q_1,q_2) = f'_{q_1}(q_1,q_2)/f'_{q_2}(q_1,q_2)$). On a donc, en particulier : $\text{TMS}_{2/1}(\lambda q_1,\lambda q_2) = \lambda^0 \text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2)$. D'où, en posant $\lambda = 1/q_2$ (et en supposant $q_2 \neq 0$) :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1,q_2) = \text{TMS}_{2/1}(\frac{q_1}{q_2},1).$$

Il s'ensuit que le TMS en un panier quelconque d'une fonction de production homogène ne dépend que du rapport q_1/q_2, donc de la pente de la droite joignant ce panier à l'origine. Autrement dit, le TMS est le même le long de tout « rayon » issu d'origine, comme dans le cas décrit dans la figure 4.2 (les isoquantes sont alors *homothétiques*).

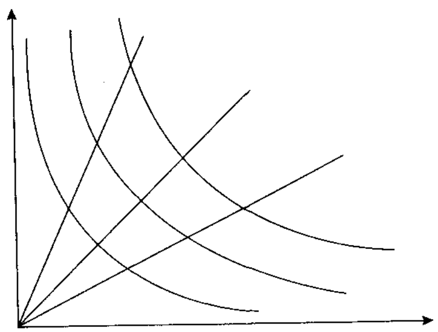

Figure 4.2

II Les rendements d'échelle

La notion de rendements d'échelle apparaît dès qu'on s'intéresse aux effets sur la production d'une variation simultanée et dans la même proportion de *tous les inputs*. La nature des rendements d'échelle se détermine en comparant le taux de croissance des inputs, noté λ (en supposant $\lambda > 1$), au taux de croissance de la production, $f(\lambda Q)/f(Q)$ (en supposant $f(Q) \neq 0$). Ce qui revient à étudier le signe de la différence entre ces deux taux, $f(\lambda Q)/f(Q) - \lambda$, et donc le signe de la différence $f(\lambda Q) - \lambda f(Q)$ (puisque la production $f(Q)$ ne peut qu'être positive). Ainsi, on dit que :

- les rendements d'échelle sont *croissants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) > 0$, pour tout $\lambda > 1$;
- les rendements d'échelle sont *constants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) = 0$, pour tout $\lambda > 1$;
- les rendements d'échelle sont *décroissants* en Q si $f(\lambda Q) - \lambda f(Q) < 0$, pour tout $\lambda > 1$.

Un cas où la détermination des rendements d'échelle est particulièrement simple est celui où la fonction de production est *homogène de degré* k (c'est-à-dire, où on a $f(\lambda Q) = \lambda^k f(Q)$, pour tout $\lambda > 0$). En effet, dans ce cas, et ce quel que soit Q :

- les rendements d'échelle sont croissants si $k > 1$;
- les rendements d'échelle sont constants si $k = 1$;
- les rendements d'échelle sont décroissants si $k < 1$.

Si la fonction de production est strictement concave (*cf.* fiche 26), alors ses rendements d'échelle sont décroissants ; si elle est, en outre, dérivable, alors ses productivités marginales sont aussi strictement décroissantes. Une condition suffisante pour qu'une fonction de production de classe C^2 à deux inputs soit strictement concave est que ses productivités marginales soient décroissantes ($f''_{q_i^2}(\cdot) < 0$, $i = 1,2$) et que :

$$f''_{q_1^2}(\cdot)\, f''_{q_2^2}(\cdot) - [f''_{q_1 q_2}(\cdot)]^2 > 0.$$